ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ

ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ադամյան Մարիամ Ալեքսանդրի

ԳԾԱՅԻՆ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՎԱԾ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻՋՈՑՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄԸ

Ե. 13.02 – «ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ» մասնագիտությամբ տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2021

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ, КУЛЬТУРЫ И СПОРТА РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

Адамян Мариам Александровна

РАЗРАБОТКА СРЕДСТВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности 05.13.02 – “СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ”

Ереван 2021

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ տ.գ.դ. Ս.Հ. Սիմոնյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ տ.գ.դ. Ա.Գ. Ավետիսյան

ֆ.-մ.գ.թ. Հ.Ց. Հակոբյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Երևանի պետական համալսարան

Ատենախոսության պաշտպանությունը տեղի կունենա 2021թ. հունիսի 25–ին ժամը 14⁰⁰ –ին ՀԱՊՀ-ում գործող ՀՀ ԲՈԿ-ի «Կառավարման և ավտոմատացման» 032 Մասնագիտական խորհրդի նիստում: Հասցեն՝ 0009, Երևան, Տերյան փ., 105, 17-րդ մասնաշենք:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀԱՊՀ գրադարանում:

Սեղմնագիրն առաքված է 2021 թ. մայիսի 14-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար տ.գ.թ.՝ Ա.Վ. Մելիքյան

Тема диссертации утверждена в Национальном политехническом университете Армении

Научный руководитель: д.т.н. С.О. Симонян

Официальные оппоненты: д.т.н. А.Г. Аветисян

к.ф.-м.н. Г.Ц. Акопян

Ведущая организация: Ереванский государственный университет

Защита диссертации состоится 25 июня 2021г. в 14^{00} часов на заседании Специализированного совета 032 – “Управления и автоматизации” ВАК РА, действующего при НПУА. Адрес: 0009, Ереван, ул. Теряна, 105, корпус 17.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НПУА.

Автореферат разослан 14 мая 2021 г.

Учёный секретарь
Специализированного совета к.т.н. А.В. Меликян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Стремительный подъём современного научно-технического прогресса, в частности, в сфере информационных технологий, системного анализа, управления и автоматизации и др., являющихся стратегическими направлениями, обуславливает необходимость разработки новых высокопроизводительных вычислительных средств – методов, алгоритмов, пакетов прикладных программ (ППП) и др.

В различных областях научно – практических исследований довольно часто встречаются задачи, описываемые линейными системами конечных уравнений. Если в настоящее время для решения задач с числовыми матрицами имеется множество методов, оперирующих различными математическими аппаратами, то методы решения линейных однопараметрических (функциональных) систем конечных уравнений немногочисленны и почти не удостоены внимания. Исходя из вышеизложенного, возникает необходимость разработки новых аналитических и численно – аналитических методов, направленных на достижение этой цели, на их всестороннее исследование, а также на их последовательное и, в случае необходимости, параллельное использование. Разработке таких методов и ППП на их основе посвящена настоящая диссертация.

Как показывают исследования, разработке вычислительных средств с вышеотмеченными характеристиками во многом удовлетворяют так называемые дифференциальные преобразования, предложенные и достаточно развитые акад. НАН Украины Г.Е. Пуховым в 70-80 гг. предыдущего столетия.

Дифференциальные преобразования задаются следующими соотношениями:

$$X(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K X(t)}{dt^K}\bigg|_{t=t_\nu}, K=\overline{0,\infty} \risingdotseq X(t) = æ(t, t_\nu, H, X(K), K=\overline{0,\infty}),$$

где $X(K)$ – изображение (дискрет) оригинала $X(t)$ – функция целочисленного аргумента $K=\overline{0,\infty}$; H – некоторая постоянная (масштабный коэффициент), которая вводится с целью выравнивания размерностей слагаемых оригинала; t_ν – центр аппроксимации; $\risingdotseq$ знак перехода из области оригиналов в область изображений и наоборот; $æ(\cdot)$ – некоторая функция, обуславливающая восстановление оригинала $X(t)$.

Эти преобразования были широко использованы для решения однопараметрических нелинейных уравнений и задач математического программирования; определения инвариантов однопараметрических матриц; вычисления многоточечных краевых задач, оптимального управления, матричных уравнений типов Сильвестра, Стейна, Риккати, нелинейных и жестких дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, уравнений биохимических, биологических процессов, уравнений окружающей среды; определения характеристик электрических приборов, динамики летательных аппаратов, уравнений нелинейной газодинамики, плазмы и физики твердого тела, дифференциально-алгебраических систем уравнений, интегро-дифференциальных уравнений и решения различных научно-практических задач.

Что касается разработки методов решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений и ППП, работающих на их основе, то кажущаяся на первый взгляд эта простая задача почти не была удостоена должного внимания. Поэтому появилась насущная необходимость заполнить этот очевидный пробел, чем и обусловлена актуальность темы настоящей диссертации.

Целью диссертационной работы является:

1. Разработка новых аналитических и основанных на новейшем операционном исчислении-дифференциальных преобразованиях численно-аналитических методов (D-аналогов) решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений.

2. Создание работающего в диалоговом режиме ППП “LINPARSYS” с использованием разработанных новых численно-аналитических методов и основанных на них программных средств.

3. Решение модельных примеров и тестовой задачи с применением созданного ППП.

4. Решение одной важной научно-практической задачи-однопараметрической обобщенной проблемы собственных значений-функций и собственных векторов-функций.

<u>Методы исследования</u>: Для достижения поставленной цели были использованы: алгебра дифференциальных преобразований; методы теории матриц и линейной алгебры; методы машинного моделирования; современные информационные технологии синтеза программных средств и ППП.

<u>Научная новизна</u> диссертационной работы заключается в следующем:

1. Разработаны:
   - аналитические декомпозиционные методы с непрямым подходом:
     - с матрично-блочно-столбцевой разновидностью,
     - с матрично-блочно-строчной разновидностью;
   - численно-аналитические декомпозиционные методы с непрямым подходом:
     - с матрично-блочно-столбцевой разновидностью,
     - с матрично-блочно-строчной разновидностью;
   - декомпозиционные методы с прямым подходом:
     - аналитические методы для решения корректных и некорректных задач,
     - численно-аналитические методы для решения корректных и некорректных задач;
   - методы, основанные на методе наименьших квадратов:
     - со спектральной разновидностью,
     - аналитической разновидностью,
     - с численно-аналитической разновидностью;
   - методы, основанные на сопряженном аналоге метода наименьших квадратов:
     - аналитический метод,
     - прямой численно-аналитический метод,
     - декомпозиционный численно-аналитический метод.
2. С применением предложенных численно-аналитических методов и разработанных на их основе программных средств создан ППП “LINPARSYS”, с помощью которого полностью автоматизированы вычислительные процедуры решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений.
3. Решением модельных примеров и тестовой задачи осуществлен сравнительный анализ предложенных численно-аналитических методов.
4. Решена одна важная научно-практическая задача-однопараметрическая обобщенная проблема собственных значений-функций и собственных векторов-функций.

<u>Практическая ценность</u> работы заключается в следующем: программные средства, включенные в состав ППП “LINPARSYS”, осуществлены с помощью языка JAVA с использованием среды MATLAB, который работает на большинстве современных операционных систем, включая Linux, Mac OS и Windows. ППП эксплуатируется легко, так как он работает в диалоговом режиме и не требует от пользователя предварительных специальных знаний. ППП позволяет широко использовать возможности современных информационных технологий и получить эффективные вычислительные процедуры при решении линейных однопараметрических систем конечных уравнений. В случае необходимости пакет легко может быть дополнен другими методами/программами.

Внедрение: Результаты диссертации использованы:

- в рамках программы сохранения и развития базовой научно-исследовательской лаборатории "Системный анализ" НПУА (договор N10-4/Ե-13, 2015 г. и договор N10-4/I-13, 2016-2020 гг.), относящейся к области "Инженерия и технология" (2) (электротехника, электроника, энергетика, компьютерные и информационные технологии (шифр-2.2)), финансируемой Министерством образования, науки, культуры и спорта РА на конкурсной основе;
- в процессе обучения студентов бакалавриата, магистратуры и аспирантуры кафедры "Информационные технологии и автоматизация" (ИТиА) НПУА (2015-2020гг.).

Основные положения, выносимые на защиту

1. Следующие методы решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений:
   - аналитические декомпозиционные методы с непрямым подходом;
   - численно-аналитические декомпозиционные методы с непрямым подходом;
   - численно-аналитические декомпозиционные методы с прямым подходом;
   - методы, основанные на методе наименьших квадратов;
   - методы, основанные на сопряженном аналоге метода наименьших квадратов;
2. Пакет прикладных программ "LINPARSYS", созданный с применением разработанных численно-аналитических методов, наделенный добротными вычислительными характеристиками.

Результаты сравнительного анализа предложенных методов, проведенного на основе решения двух модельных примеров и тестовой задачи с применением разработанного ППП.

Апробация результатов диссертации.

Основные положения и научные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- научных семинарах кафедры ИТиА НПУА (2017-2020 гг.);
- годичных конференциях НПУА (2016-2019 гг.).

Публикации.

Основные научно-практические результаты диссертации опубликованы в 10 научных работах, список которых представлен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, основных выводов, списка использованной литературы из 146 наименований, двух приложений на 19 страницах. Общий объем работы составляет 158 страницы, включая 5 рисунков и 9 таблиц. Диссертация написана на армянском языке.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цель и задачи работы, представлены научная новизна, практическое значение и основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе "ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ЦЕЛИ ДИССЕРТАЦИИ" представлены некоторые сведения относительно дифференциальных преобразований. Отмечено, что известный метод замороженных коэффициентов решения функциональных (однопараметрических) задач порождает различные вычислительные неудобства, от которых легко избавляются путем использования так называемых дифференциальных преобразований. Заметим, что, в отличие от известного в мире множества интегральных преобразований, при дифференциальных преобразованиях переход из области оригиналов в область изображений осуществляется операцией дифференцирования, а обратный переход из области изображений в область оригиналов – операцией обычного суммирования. Последними обстоятельствами и обуславливаются простота и эффективность вычислительных средств, разработанных и разрабатываемых в настоящее время на основе дифференциальных преобразований. Проведен также краткий обзор фундаментальных монографий основателя дифференциальных преобразований – академика НАН Украины Г.Е. Пухова. Полученные в его исследованиях важные научно-практические результаты открыли широкий путь перед различными исследователями для решения множества аналитических и численно-аналитических задач сравнительно простыми инструментальными средствами. Особо подчеркнуто, что дальнейшее развитие теоретико-практических положений дифференциальных преобразований происходит адекватно настоящим мировым тенденциям в области информационных технологий. Здесь же проведен анализ работ, в основном опубликованных за последние два десятилетия, в числе которых 5 монографий, 18 диссертаций, 92 других труда. Монографии содержат как фундаментальные теоретические результаты в области дальнейшего развития дифференциальных преобразований, так и результаты с точки зрения их практической реализации с применением широких возможностей, предоставляемых современными информационными технологиями.

Диссертации посвящены вопросам параметрического синтеза и цифрового моделирования отдельных задач с переменными параметрами, встречающихся в различных областях науки и техники; разработке новых методов решения корректных и некорректных задач; исследованию характеристик высокочастотных радиотехнических устройств; моделированию и оптимизации динамических объектов и процессов; разработке *D*-аналогов соответствующих методов решения однопараметрических эквивалентов цифровых задач; *D*-аналогов решения различных однопараметрических матричных уравнений; новым методам решения задач математического программирования и динамических экстремальных задач; *D*-аналогов определения различных однопараметрических обобщенных обратных матриц; собственных значений-функций; собственных векторов-функций; характеристических многочленов однопараметрических матриц; разработке методов решения однопараметрических задач линейного и квадратичного программирования различных классов; разработке методов решения задач оптимального управления; синтезу систем управления с необходимыми качественными характеристиками; выявлению свойств устойчивости или неустойчивости линейных нестационарных систем управления (во всех диссертациях были разработаны соответствующие пакеты прикладных программ с использованием при этом различных средств современных информационных технологий); *D*-аналогам разложения однопараметрических матриц; методам решения однопараметрических статических и динамических матричных уравнений Ляпунова, Сильвестра, Стейна и Риккати; методам решения однопараметрических квадратных матричных уравнений, матричных уравнений третьего и четвертого порядков и т.д. Научные результаты, полученные в англоязычных работах, в основном относятся к исследованию и решению отдельных задач с применением дифференциальных преобразований, встречающихся в различных областях науки и техники.

В конце главы сформулированы основные цели диссертации на основе представленных выводов.

Во второй главе "РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ КОНЕЧНЫХ УРАВНЕНИЙ" предложены:

- аналитические декомпозиционные методы решения с непрямым подходом;
- численно-аналитические декомпозиционные методы решения с непрямым подходом;
- декомпозиционные методы решения с прямым подходом;
- методы, основанные на методе наименьших квадратов;
- методы, основанные на сопряженном аналоге метода наименьших квадратов.

Кратко представим соответствующие математические модели определения решений линейных однопараметрических систем конечных уравнений:

$$A(t)_{m\times n}\cdot X(t)_{n\times 1}=a(t)_{m\times 1}, \tag{2.1.1}$$

учитывая при этом, что при корректных системах $m=n, \det A(t)\ \neq 0$, а решение имеет вид

$$X(t)_{n\times 1}=A^{-1}(t)_{n\times m}\cdot a(t)_{m\times 1}, \tag{2.1.2}$$

где $A^{-1}(t)$ – обратная к $A(t)$ матрица, а при некорректных системах: $m\neq n$, а решение имеет вид

$$X(t)_{n\times 1}=A^{+}(t)_{n\times m}\cdot a(t)_{m\times 1}, \tag{2.1.3}$$

где $A^{+}(t)$ – обобщенная обратная к $A(t)$ матрица. При этом предположим, что все элементы рассматриваемых однопараметрических матриц и векторов являются аналитическими функциями в выбираемых центрах аппроксимации t_ν.

Замечание. Если решение задачи определяется согласно (2.1.2) или (2.1.3), при которых сначала определяются матрицы $A^{-1}(t)$ или $A^{+}(t)$, а затем они умножаются на векторы-столбцы $a(t)$, т.е. решение $X(t)$ получается не непосредственно, то эти методы называем методами с непрямым подходом. Если же решение $X(t)$ получается путем одновременного использования матрицы $A(t)$ и вектора-столбца $a(t)$, то эти методы называем методами с прямым подходом.

Теперь кратко представим соответствующие математические модели определения решений задачи (2.1.1), имея в виду, что в общем случае имеют место разложения

$$A(t)_{m\times n}=A_1(t)_{m\times n}+j\cdot A_2(t)_{m\times n}, \tag{2.1.4}$$

$$X(t)_{n\times 1}=X_1(t)_{n\times 1}+j\cdot X_2(t)_{n\times 1}, \tag{2.1.5}$$

$$a(t)_{n\times 1}=a_1(t)_{n\times 1}+j\cdot a_2(t)_{n\times 1}, \tag{2.1.6}$$

$$A^{+}(t)_{n\times m}=Z(t)_{n\times m}=Z_1(t)_{n\times m}+j\cdot Z_2(t)_{n\times m}, \tag{2.1.7}$$

$$A^{*}(t)_{n\times m}=[A_1(t)_{m\times n}-j\cdot A_2(t)_{m\times n}]^T={A_1}^T(t)_{m\times n}-j\cdot {A_2}^T(t)_{m\times n}\,. \tag{2.1.8}$$

2.1. Аналитические декомпозиционные методы решения с непрямым подходом

Оперируя общеизвестными соотношениями

$$A^{*}(t)=A^{*}(t)\cdot A(t)\cdot A^{+}(t), \tag{2.1.9}$$

$$A^{*}(t)=A^{+}(t)\cdot A(t)\cdot A^{*}(t), \tag{2.1.10}$$

представим два метода решения задачи (2.1.1).

2.1.1. Матрично-блочно-столбцевой эквивалент

Учитывая разложения (2.1.4), (2.1.7) и (2.1.8), в соответствии с (2.1.9) получим

$$\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hdashline -A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hdashline A_2(t) & A_1(t) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} Z_1(t) \\ \hdashline Z_2(t) \end{array}\right] = D_1(t) \cdot \left[\begin{array}{c} Z_1(t) \\ \hdashline Z_2(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_1^T(t) \\ \hdashline -A_2^T(t) \end{array}\right], \tag{2.1.11}$$

откуда

$$\underset{2n\times m}{\left[\begin{array}{c} Z_1(t) \\ \hdashline Z_2(t) \end{array}\right]} = \left[\underset{2n\times 2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hdashline -A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right]} \cdot \underset{2m\times 2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hdashline A_2(t) & A_1(t) \end{array}\right]} \right]^{-1} \cdot \underset{2n\times m}{\left[\begin{array}{c} A_1^T(t) \\ \hdashline -A_2^T(t) \end{array}\right]} = \tag{2.1.12}$$

$$= \underset{2n\times 2n}{D_1^{-1}(t)} \cdot \underset{2n\times m}{\left[\begin{array}{c} A_1^T(t) \\ \hdashline -A_2^T(t) \end{array}\right]}.$$

Таким образом, имея промежуточный важный результат (2.1.12) по определению обобщенной обратной матрицы (2.1.7), согласно (2.1.3) можно определить и непрерывное решение $X(t)$.

Замечание 1. Матрица $D_1(t)$ блочно-кососимметрична относительно первой главной диагонали и блочно-симметрична относительно второй главной диагонали из-за блочной кососимметричности относительно первых главных диагоналей и блочной симметричности относительно вторых главных диагоналей ее блочных матриц-сомножителей.

2.1.2. Матрично-блочно-строчный эквивалент

Учитывая разложения (2.1.4), (2.1.7) и (2.1.8), в соответствии с (2.1.10) получим

$$[A_1^T(t) \;\vdots\; -A_2^T(t)] = [Z_1(t) \;\vdots\; Z_2(t)] \cdot \left[\begin{array}{c:c} A_1(t) & A_2(t) \\ \hdashline -A_2(t) & A_1(t) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right] =$$

$$= [Z_1(t) \;\vdots\; Z_2(t)] \cdot D_2(t), \tag{2.1.13}$$

откуда

$$[Z_1(t) \vdots Z_2(t)] = [A_1^T(t) \vdots -A_2^T(t)] \cdot \left\{ \left[\begin{array}{c:c} A_1(t) & A_2(t) \\ \hdashline -A_2(t) & A_1(t) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right] \right\}^{-1} =$$

$$= [A_1^T(t) \;\vdots\; -A_2^T(t)] \cdot D_2^{-1}(t). \tag{2.1.14}$$

Аналогично, имея промежуточный важный результат (2.1.14), согласно (2.1.3) можно определить и непрерывное решение $X(t)$.

Замечание 2. Приведенные в замечании 1 свойства для матриц $D_1(t)$ и $D_1{}^{-1}(t)$ сохраняются и здесь для матриц $D_2(t)$ и $D_2{}^{-1}(t)$.

Замечание 3. Использование аналитического решения (2.1.12) целесообразно при переопределенных системах (2.1.1), когда $m > n$, а использование аналитического решения (2.1.14) – при недоопределенных системах (2.1.1), когда $m < n$ (из-за малых размеров матриц $D_1(t)$, $D_1{}^{-1}(t)$ и $D_2(t)$, $D_2{}^{-1}(t)$ соответственно).

Замечание 4. Практическое использование предложенных методов весьма затруднительно. Однако эти методы служат основой для разработки эффективных численно-аналитических методов решения рассматриваемых задач.

2.2. Численно-аналитические декомпозиционные методы решения с непрямым подходом

Теперь, предполагая, что для матриц $A(t), A_1(t), A_2(t)$ и $Z(t), Z_1(t), Z_2(t)$ имеют место дифференциальные преобразования

$$A(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\dot{=}\; A(t)=\chi_1\left(t,t_\nu,H,A(K),\,K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.2.1}$$

$$A_1(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A_1(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\dot{=}\; A_1(t)=\chi_2\left(t,t_\nu,H,A_1(K),\,K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.2.2}$$

$$A_2(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A_2(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\dot{=}\; A_2(t)=\chi_3\left(t,t_\nu,H,A_2(K),\,K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.2.3}$$

$$Z(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K Z(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\dot{=}\; Z(K)=\chi_4\left(t,t_\nu,H,Z(K),\,K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.2.4}$$

$$Z_1(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K Z_1(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\dot{=}\; Z_1(t)=\chi_5\left(t,t_\nu,H,Z_1(K),\,K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.2.5}$$

$$Z_2(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K Z_2(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\dot{=}\; Z_2(t)=\chi_6\left(t,t_\nu,H,Z_2(K),\,K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.2.6}$$

представим соответствующие конструктивные численно-аналитические методы решения задачи (2.1.1).

<u>2.2.1. Матрично-блочно-столбцевой</u> эквивалент

Учитывая дифференциальные преобразования (2.2.2), (2.2.3) и (2.2.5), (2.2.6), переведем матрично-блочно-столбцевой эквивалент (2.1.11) из области оригиналов в область дифференциальных изображений. При этом получим

$$\sum_{\ell=0}^{K-1}\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(K-\ell) & A_2^T(K-\ell) \\ \hdashline -A_2^T(K-\ell) & A_1^T(K-\ell)\end{array}\right]\cdot\sum_{p=0}^{\ell}\left[\begin{array}{c:c} A_1(p) & -A_2(p) \\ \hdashline A_2(p) & A_1(p)\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} Z_1(\ell-p) \\ \hdashline Z_2(\ell-p)\end{array}\right]+$$
$$+\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & A_2^T(0) \\ \hdashline -A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c:c} A_1(0) & -A_2(0) \\ \hdashline A_2(0) & A_1(0)\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} Z_1(K) \\ \hdashline Z_2(K)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} A_1^T(K) \\ \hdashline -A_2^T(K)\end{array}\right], \tag{2.2.7}$$

откуда

$$\underset{2n\times m}{\left[\begin{array}{c} Z_1(K) \\ \hdashline Z_2(K)\end{array}\right]}=\left\{\underset{2n\times 2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & A_2^T(0) \\ \hdashline -A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{array}\right]}\cdot\underset{2m\times 2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1(0) & -A_2(0) \\ \hdashline A_2(0) & A_1(0)\end{array}\right]}\right\}^{-1}\cdot\left\{\underset{2n\times m}{\left[\begin{array}{c} A_1^T(K) \\ \hline -A_2^T(K)\end{array}\right]}-\right.$$

$$\left.-\sum_{\ell=0}^{K-1}\underset{2n\times 2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(K-\ell) & A_2^T(K-\ell) \\ \hdashline -A_2^T(K-\ell) & A_1^T(K-\ell)\end{array}\right]}\cdot\sum_{p=0}^{\ell}\underset{2m\times 2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1(p) & -A_2(p) \\ \hdashline A_2(p) & A_1(p)\end{array}\right]}\cdot\underset{2n\times m}{\left[\begin{array}{c} Z_1(\ell-p) \\ \hdashline Z_2(\ell-p)\end{array}\right]}\right\}= \tag{2.2.8}$$

$$=D_1^{-1}(0,0)\cdot\left\{\left[\begin{array}{c} A_1^T(K) \\ \hdashline -A_2^T(K)\end{array}\right]-\sum_{\ell=0}^{K-1}\sum_{p=0}^{\ell}D_1(K-\ell,p)\cdot\left[\begin{array}{c} Z_1(\ell-p) \\ \hdashline Z_2(\ell-p)\end{array}\right]\right\},K=\overline{0,\infty}.$$

Таким образом, изменяя целочисленный аргумент $K=\overline{0,\infty}$, можно последовательно и рекуррентно определить матричные дискреты $Z(0), Z(1),\ldots, Z(K)$ и, в соответствии с правой частью (2.2.4), непрерывное решение $Z(t)$, а далее – и $X(t)$ согласно (2.1.2) или (2.1.3).

<u>Замечание 1</u>. Матрица $D_1(0,0)$ блочно-кососимметрична относительно первой главной диагонали и блочно-симметрична относительно второй главной диагонали.

Такими же свойствами обладают и все матрицы $D_1(1{,}0),\ D_1(0{,}1);\ D_1(2{,}0),\ D_1(0{,}2);\ \dots;$ $D_1(K-l,P),\ D_1(P,K-l);\ P,l=\overline{1,K}$.

2.2.2. Матрично-блочно-строчный эквивалент

Учитывая дифференциальные преобразования (2.2.2), (2.2.3) и (2.2.5), (2.2.6), переведем матрично-блочно-строчный эквивалент (2.1.13) из области оригиналов в область дифференциальных изображений. При этом получим

$$\left[Z_1(K) \,\vdots\, Z_2(K)\right]\cdot\begin{bmatrix} A_1(0) & A_2(0) \\ -A_2(0) & A_1(0)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{bmatrix}+\sum_{\ell=0}^{K-1}\left[Z_1(K-\ell) \,\vdots\, Z_2(K-\ell)\right]\times$$

$$\times\sum_{p=0}^{\ell}\begin{bmatrix} A_1(p) & A_2(p) \\ -A_2(p) & A_1(p)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A_1^T(\ell-p) & -A_2^T(\ell-p) \\ A_2^T(\ell-p) & A_1^T(\ell-p)\end{bmatrix}=\left[A_1^T(K) \,\vdots\, A_2^T(K)\right], \tag{2.2.9}$$

откуда

$$\underset{n\times 2m}{\left[Z_1(K) \,\vdots\, Z_2(K)\right]}=\left\{\underset{n\times 2m}{\left[A_1^T(K) \,\vdots\, -A_2^T(K)\right]}-\sum_{\ell=0}^{K-1}\underset{n\times 2m}{\left[Z_1(K-\ell) \,\vdots\, Z_2(K-\ell)\right]}\cdot\sum_{p=0}^{\ell}\underset{2m\times 2n}{\begin{bmatrix} A_1(p) & A_2(p) \\ -A_2(p) & A_1(p)\end{bmatrix}}\times\right.$$

$$\left.\times\underset{2n\times 2m}{\begin{bmatrix} A_1^T(\ell-p) & -A_2^T(\ell-p) \\ A_2^T(\ell-p) & A_1^T(\ell-p)\end{bmatrix}}\right\}\times\left\{\underset{2m\times 2n}{\begin{bmatrix} A_1(0) & A_2(0) \\ -A_2(0) & A_1(0)\end{bmatrix}}\cdot\underset{2n\times 2m}{\begin{bmatrix} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{bmatrix}}\right\}^{-1}= \tag{2.2.10}$$

$$=\left\{\left[A_1^T(K) \,\vdots\, -A_2^T(K)\right]-\sum_{\ell=0}^{K-1}\sum_{p=0}^{\ell}\left[Z_1(K-\ell) \,\vdots\, Z_2(K-\ell)\right]\cdot\ D_2(p,\ \ell-p)\right\}\cdot D_2^{-1}(0{,}0), K=\overline{0,\infty}.$$

Таким образом, изменяя целочисленный аргумент $K=\overline{0,\infty}$, можно последовательно и рекуррентно определить матричные дискреты $Z(0), Z(1), \dots,\ Z(K)$ и, в соответствии с правой частью (2.2.4), непрерывное решение $Z(t)$, а далее – и $X(t)$ согласно (2.1.2) или (2.1.3).

Замечание 2. Свойства для матриц $D_1(0{,}0),\ D_1^{-1}(0{,}0);\ D_1(1{,}0),\ D\,(0{,}1);\ \dots;\ D_1(K-l,P),$ $D_1(P,K-l)$, приведенные в замечании 1, сохраняются и здесь для матриц $D_2(0{,}0),\ D_2^{-1}(0{,}0);$ $D_2(1{,}0),\ D_2(0{,}1);\dots;\ D_2(K-l,P),\ D_2(P,K-l)$.

Замечание 3. Использование рекуррентных вычислительных схем (2.2.8) целесообразно при переопределенных системах (2.1.1) , когда m>n, а использование рекуррентных вычислительных схем (2.2.10) – при недоопределённых системах (2.1.1), когда m<n (из-за малых размеров матриц $D_1(0{,}0),\ D_1^{-1}(0{,}0);\ D_1(0{,}1),\ D_1(1{,}0);\dots;D_1(K-l,P),\ D_1(P,K-l)$ и $D_2(0{,}0),\ D_2^{-1}(0{,}0);\ D_2(0{,}1),$ $D_2(1{,}0);\dots;\ D_2(K-l,P),\ D_2(P,K-l)$ соответственно).

Замечание 4. Практическое использование предложенных численно-аналитических методов не связано с принципиальными затруднениями и может быть эффективно реализовано средствами современных информационных технологий.

2.3. Декомпозиционные методы решения с прямым подходом

В этом разделе представим методы, в которых неизвестные векторы (2.1.5) и векторы правых частей (2.1.6) используются непосредственно.

2.3.1. Аналитические декомпозиционные методы

Метод решения корректных задач

С учетом (2.1.5) и (2.1.6) в соответствии с (2.1.1) получаем

$$\underset{2n\times 2n}{\left[\begin{array}{c|c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hline A_2(t) & A_1(t) \end{array}\right]}\cdot\underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hline X_2(t) \end{array}\right)}=\underset{2n\times 2n}{D_1(t)}\cdot\underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hline X_2(t) \end{array}\right)}=\underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hline a_2(t) \end{array}\right)}, \tag{2.3.1}$$

откуда

$$\underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hline X_2(t) \end{array}\right)}=\underset{2n\times 2n}{\left[\begin{array}{c|c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hline A_2(t) & A_1(t) \end{array}\right]^{-1}}\cdot\underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hline a_2(t) \end{array}\right)}=\underset{2n\times 2n}{D_1^{-1}(t)}\cdot\underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hline a_2(t) \end{array}\right)}. \tag{2.3.2}$$

Замечание 1. Матрица $D_1(t)$ блочно-кососимметрична относительно первой главной диагонали и блочно-симметрична относительно второй главной диагонали. Эти свойства сохраняются и для матрицы $D_1^{-1}(t)$.

Метод решения некорректных задач

С учетом (2.1.5) и (2.1.6) в соответствии с (2.1.1) получаем

$$\underset{2m\times 2n}{\left[\begin{array}{c|c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hline A_2(t) & A_1(t) \end{array}\right]}\cdot\underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hline X_2(t) \end{array}\right)}=\underset{2m\times 2n}{D_2(t)}\cdot\underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hline X_2(t) \end{array}\right)}=\underset{2m\times 1}{\left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hline a_2(t) \end{array}\right)}, \tag{2.3.3}$$

откуда

$$\underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hline X_2(t) \end{array}\right)}=\underset{2n\times 2m}{\left[\begin{array}{c|c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hline A_2(t) & A_1(t) \end{array}\right]^{+}}\cdot\underset{2m\times 1}{\left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hline a_2(t) \end{array}\right)}=\underset{2n\times 2m}{D_2^{+}(t)}\cdot\underset{2m\times 1}{\left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hline a_2(t) \end{array}\right)}. \tag{2.3.4}$$

Замечание 2. Матрица $D_2(t)$ блочно-кососимметрична относительно первой главной диагонали и блочно-симметрична относительно второй главной диагонали. Эти свойства сохраняются и для матрицы $D_2^{+}(t)$.

Замечание 3. Соотношение (2.3.4) представляет себой наилучшее приближенное решение задачи в связи с обобщенной обратной матрицей $D_2^{+}(t)$.

Замечание 4. Практическое использование предложенных методов весьма затруднительно. Однако они служат основой для разработки эффективных численно-аналитических методов решения рассматриваемых задач.

2.3.2. Численно-аналитические декомпозиционные методы

Теперь допустим, что совместно с дифференциальными преобразованиями (2.2.1)-(2.2.3) имеют место и дифференциальные преобразования

$$X(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\left.\frac{d^K X(t)}{dt^K}\right|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \div\ X(t)=\chi_7\left(t,t_\nu,H,X(K),\,K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.3.5}$$

$$X_1(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\left.\frac{d^K X_1(t)}{dt^K}\right|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \div\ X_1(t)=\chi_8\left(t,t_\nu,H,X_1(K),\,K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.3.6}$$

$$X_2(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K X_2(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\dot{=}\; X_2(t)=\chi_9\left(t,t_\nu,H,X_2(K),\ K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.3.7}$$

$$a(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K a(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\dot{=}\; a(t)=\chi_{10}\left(t,t_\nu,H,a(K),\ K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.3.8}$$

$$a_1(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K a_1(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\dot{=}\; a_1(t)=\chi_{11}\left(t,t_\nu,H,a_1(K),\ K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.3.9}$$

$$a_2(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K a_2(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\dot{=}\; a_2(t)=\chi_{12}\left(t,t_\nu,H,a_2(K),\ K=\overline{0,\infty}\right). \tag{2.3.10}$$

<u>Метод решения корректных задач</u>

С учетом (2.3.5) - (2.3.10) представление (2.3.1) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. При этом получаем

$$\begin{bmatrix} A_1(0) & -A_2(0) \\ A_2(0) & A_1(0) \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X_1(K) \\ X_2(K) \end{pmatrix}+\sum_{\ell=1}^{K}\begin{bmatrix} A_1(\ell) & -A_2(\ell) \\ A_2(\ell) & A_1(\ell) \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X_1(K-\ell) \\ X_2(K-\ell) \end{pmatrix}= \tag{2.3.11}$$

$$=D_1(0)\cdot\begin{pmatrix} X_1(K) \\ X_2(K) \end{pmatrix}+\sum_{\ell=1}^{K}D_1(\ell)\cdot\begin{pmatrix} X_1(K-\ell) \\ X_2(K-\ell) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1(K) \\ a_2(K) \end{pmatrix},$$

откуда

$$\underset{2n\times 1}{\begin{pmatrix} X_1(K) \\ X_2(K) \end{pmatrix}}=\underset{2n\times 2n}{D_1^{-1}(0)}\cdot\left\{\underset{2n\times 1}{\begin{pmatrix} a_1(K) \\ a_2(K) \end{pmatrix}}-\sum_{\ell=1}^{K}\underset{2n\times 2n}{D_1(\ell)}\cdot\underset{2n\times 1}{\begin{pmatrix} X_1(K-\ell) \\ X_2(K-\ell) \end{pmatrix}}\right\}. \tag{2.3.12}$$

Таким образом, изменяя целочисленный аргумент $K=\overline{0,\infty}$, можно последовательно и рекуррентно определить векторные дискреты *X(0), X(1) , …, X(K)* и, в соответствии с правой частью (2.3.5), непрерывное решение *X(t)* согласно (2.1.2).

<u>Замечание 5</u>. Свойства блочной кососимметричности относительно первых главных диагоналей и блочной симметричности относительно вторых главных диагоналей остаются в силе как для блочных матричных дискретов $D_1(0)$ и $D_1^{-1}(0)$, так и для блочных матричных дискретов $D_1(K)$, $K \geq \overline{1,\infty}$.

<u>Метод решения некорректных задач</u>

Для нахождения решений некорректных линейных однопараметрических систем конечных уравнений можно использовать аналогичные (2.3.11), (2.3.12) соотношения, используя вместо матричных дискретов $\underset{2n\times 2n}{D_1(0)}$, $\underset{2n\times 2n}{D_1^{-1}(0)}$ и $\underset{2n\times 2n}{D_1(\ell)}$, $\underset{2n\times 2n}{D_1^{-1}(\ell)}$, $\ell\geq\overline{1,\infty}$, матричные дискреты $\underset{2m\times 2n}{D_2(0)}$, $\underset{2n\times 2m}{D_2^{+}(0)}$ и $\underset{2m\times 2n}{D_2(\ell)}$, $\underset{2n\times 2m}{D_2^{+}(\ell)}$, $\ell\geq\overline{1,\infty}$. Естественно, при использовании таких вычислительных схем речь может пойти лишь только о соответствующих наилучших приближенных решениях.

2.4. Методы, основанные на методе наименьших квадратов

Как наиболее общий случай рассмотрим некорректные задачи типа (2.1.1), т.е. при $m \neq n$. Построим критерий качества

$$\rho(t)=\varepsilon^T(t)\cdot\varepsilon(t)=(A(t)\cdot X(t)-a(t))^T\cdot(A(t)\cdot X(t)-a(t)), \tag{2.4.1}$$

необходимое условие минимума которого по *X(t)* приводит к соотношению

$$\underset{n\times m}{A^T(t)}\cdot \underset{m\times n}{A(t)}\cdot \underset{n\times 1}{X(t)} = \underset{n\times m}{A^T(t)}\cdot \underset{m\times 1}{a(t)} \tag{2.4.2}$$

или

$$\underset{n\times n}{B(t)}\cdot \underset{n\times 1}{X(t)} = \underset{n\times 1}{b(t)}\,. \tag{2.4.3}$$

Замечание 1. Матрица *B(t)* симметрична относительно первой главной диагонали.

2.4.1. Спектральный метод

С учетом алгебры дифференциальных преобразований перевод нормальной системы (2.4.2) из области оригиналов в область дифференциальных изображений приводит к спектральной модели

$$\sum_{\ell=0}^{K} A^T(K-\ell)\cdot \sum_{p=0}^{\ell} A(p)\cdot X(\ell-p) = \sum_{l=0}^{K} A^T(\ell)\cdot a(K-\ell). \tag{2.4.4}$$

Раскрытие последней приводит к следующему:

$$A^T(0)\cdot A(0)\cdot X(K) + \sum_{l=0}^{K} A^T(K-l)\cdot \sum_{p=0}^{l} A(p)\cdot X(l-p) = \sum_{l=0}^{K} A^T(l)\cdot a(K-l), \tag{2.4.5}$$

откуда

$$\underset{n\times 1}{X(K)} = [\underset{n\times n}{A^T(0)\cdot A(0)}]^{-1}\cdot (\sum_{\ell=0}^{K} \underset{n\times m}{A^T(\ell)}\cdot \underset{m\times 1}{a(K-\ell)} - \sum_{\ell=0}^{K} \underset{n\times m}{A^T(K-\ell)} \sum_{p=1}^{K} \underset{m\times n}{A(p)}\cdot \underset{n\times 1}{X(\ell-p)}),\ K=\overline{0,\infty}, \tag{2.4.6}$$

Таким образом, изменяя целочисленный аргумент $K=\overline{0,\infty}$, можно последовательно и рекуррентно определить векторные дискреты $X(0), X(1), \dots, X(K)$ и, в соответствии с правой частью (2.3.5), непрерывное решение $X(t)$ согласно (2.1.2).

2.4.2. Аналитический декомпозиционный метод

Имея в виду разложения (2.1.4) - (2.1.6), согласно (2.4.2) получаем представление

$$\underset{2n\times 2m}{\left[\begin{array}{c|c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hline -A_2^T(t) & A_1^T(t)\end{array}\right]}\cdot \underset{2m\times 2n}{\left[\begin{array}{c|c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hline A_2(t) & A_1(t)\end{array}\right]}\cdot \underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hline X_2(t)\end{array}\right)} = \underset{2n\times 2m}{\left[\begin{array}{c|c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hline -A_2^T(t) & A_1^T(t)\end{array}\right]}\cdot \underset{2m\times 1}{\left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hline a_2(t)\end{array}\right)}, \tag{2.4.7}$$

откуда

$$\left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hline X_2(t)\end{array}\right) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hline -A_2^T(t) & A_1^T(t)\end{array}\right]\cdot \left[\begin{array}{c|c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hline A_2(t) & A_1(t)\end{array}\right] \right\}^{-1}\cdot \left[\begin{array}{c|c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hline -A_2^T(t) & A_1^T(t)\end{array}\right]\cdot \left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hline a_2(t)\end{array}\right). \tag{2.4.8}$$

Таким образом, получен матрично-блочно-столбцевой эквивалент (2.4.7) соотношения (2.4.2), решение которого задается выражением (2.4.8). Естественно, практическое использование этих представлений достаточно затруднительно. Однако (2.4.7) служит основой для разработки соответствующего численно-аналитического метода.

Замечание 1. Очевидно, что матрицы, входящие в (2.4.7) и (2.4.8), блочно-кососимметричны относительно первой главной диагонали и блочно-симметричны относительно второй главной диагонали.

2.4.3. Численно-аналитический декомпозиционный метод

Теперь, учитывая дифференциальные преобразования (2.2.1) - (2.2.3), (2.3.5) - (2.3.10), аналитическое представление (2.4.7) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. При этом имеем

$$\sum_{\ell=0}^{K-1}\left[\begin{array}{c|c} A_1^T(K-\ell) & -A_2^T(K-\ell) \\ \hline A_2^T(K-\ell) & A_1^T(K-\ell)\end{array}\right]\cdot\sum_{p=0}^{\ell}\left[\begin{array}{c|c} A_1(p) & -A_2(p) \\ \hline A_2(p) & A_1(p)\end{array}\right]\cdot\left(\begin{array}{c} X_1(\ell-p) \\ \hline X_2(\ell-p)\end{array}\right)+ \tag{2.4.9}$$

$$+\left[\begin{array}{c|c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hline A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} A_1(0) & -A_2(0) \\ \hline A_2(0) & A_1(0)\end{array}\right]\cdot\left(\begin{array}{c} X_1(K) \\ \hline X_2(K)\end{array}\right)=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{K}\left[\begin{array}{c|c} A_1^T(K-\ell) & -A_2^T(K-\ell) \\ \hline A_2^T(K-\ell) & A_1^T(K-\ell)\end{array}\right]\cdot\left(\begin{array}{c} a_1(\ell) \\ \hline a_2(\ell)\end{array}\right),$$

откуда

$$\underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} X_1(K) \\ \hline X_2(K)\end{array}\right)}=\left\{\underset{2n\times 2m}{\left[\begin{array}{c|c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hline A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{array}\right]}\cdot\underset{2m\times 2n}{\left[\begin{array}{c|c} A_1(0) & -A_2(0) \\ \hline A_2(0) & A_1(0)\end{array}\right]}\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left\{\sum_{\ell=0}^{K}\underset{2n\times 2m}{\left[\begin{array}{c|c} A_1^T(K-\ell) & -A_2^T(K-\ell) \\ \hline A_2^T(K-\ell) & A_1^T(K-\ell)\end{array}\right]}\cdot\underset{2m\times 1}{\left(\begin{array}{c} a_1(\ell) \\ \hline a_2(\ell)\end{array}\right)}-\sum_{\ell=0}^{K-1}\underset{2n\times 2m}{\left[\begin{array}{c|c} A_1^T(K-\ell) & -A_2^T(K-\ell) \\ \hline A_2^T(K-\ell) & A_1^T(K-\ell)\end{array}\right]}\times\right. \tag{2.4.10}$$

$$\left.\times\sum_{p=0}^{\ell}\underset{2m\times 2n}{\left[\begin{array}{c|c} A_1(p) & -A_2(p) \\ \hline A_2(p) & A_1(p)\end{array}\right]}\cdot\underset{2n\times 1}{\left(\begin{array}{c} X_1(\ell-p) \\ \hline X_2(\ell-p)\end{array}\right)}\right\}.$$

Таким образом, определив в соответствии с (2.4.10) векторные дискреты $X(0), X(1), \dots, X(K)$, можно определить и решение $X(t)$.

Замечание 2. Матричные дискреты

$$A(K)=\left[\begin{array}{c|c} A_1(K) & -A_2(K) \\ \hline A_2(K) & A_1(K)\end{array}\right],\ K=\overline{0,\infty},$$

$$A^T(K)=\left[\begin{array}{c|c} A_1^T(K) & -A_2^T(K) \\ \hline A_2^T(K) & A_1^T(K)\end{array}\right],\ K=\overline{0,\infty},$$

блочно-кососимметричны относительно первых главных диагоналей и блочно-симметричны относительно вторых главных диагоналей. Эти свойства остаются в силе как для различных произведений этих матричных дискретов, так и для их обобщенных обратных матриц.

2.5. Методы, основанные на сопряженном аналоге метода наименьших квадратов

Теперь, как наиболее общий подход, рассмотрим по аналогии с (2.4.2) представление

$$A^*(t)_{n\times m}\cdot A(t)_{m\times n}\cdot X(t)_{n\times 1}=A^*(t)_{n\times m}\cdot a(t)_{m\times 1} \tag{2.5.1}$$

или

$$\underset{\sim}{B(t)}_{n\times n}\cdot \underset{\sim}{X(t)}_{n\times 1}=\underset{\sim}{b(t)}_{n\times 1}, \tag{2.5.2}$$

где $A^*(t)$ – сопряженная к $A(t)$ матрица.

2.5.1. Аналитический декомпозиционный метод

Учитывая соотношения (2.1.4)-(2.1.6), (2.1.8), из (2.5.1) получим представление

$$\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hdashline -A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} A_1(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2(t) & A_1^T(t) \end{array}\right] \cdot \left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hdashline X_2(t) \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hdashline -A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right] \cdot \left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hdashline a_2(t) \end{array}\right) \tag{2.5.3}$$

$$2n \times 2m \qquad 2m \times 2n \qquad 2n \times 1 \qquad 2n \times 2m \qquad 2m \times 1$$

или

$$\underset{\sim}{A}^T(t) \cdot \underset{\sim}{A}(t) \cdot \underset{\sim}{X}(t) = \underset{\sim}{A}^T(t) \cdot \underset{\sim}{a}(t). \tag{2.5.4}$$

Из (2.5.3) имеем

$$\left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hdashline X_2(t) \end{array}\right) = \left\{ \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hdashline -A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hdashline A_2(t) & A_1(t) \end{array}\right] \right\}^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hdashline -A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right] \cdot \left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hdashline a_2(t) \end{array}\right) \tag{2.5.5}$$

или

$$\underset{\sim}{X}(t) = \left[\underset{\sim}{A}^T(t) \cdot \underset{\sim}{A}\ (t)\right]^{-1} \cdot \underset{\sim}{A}^T(t) \cdot \underset{\sim}{a}(t) = \underset{\sim}{A}^+(t) \cdot \underset{\sim}{a}(t). \tag{2.5.6}$$

<u>Замечание 1</u>. Соотношение (2.5.4) внешне повторяет представление (2.4.2) с точностью до $A(t)$, иными словами, действительно, а (2.5.1) является сопряженным аналогом метода наименьших квадратов.

<u>Замечание 2</u>. Матрицы $\underset{\sim}{B}(t), \underset{\sim}{A}(t), \underset{\sim}{A}^T(t),\ \underset{\sim}{A}^T(t) \cdot \underset{\sim}{A}\ (t)$, $\left[\underset{\sim}{A}^T(t) \cdot \underset{\sim}{A}\ (t)\right]^{-1}$ блочно-кососимметричны относительно первых главных диагоналей и блочно-симметричны относительно вторых главных диагоналей.

<u>2.5.2. Прямой численно-аналитический метод</u>

Допустим, что имеют место следующие дифференциальные преобразования:

$$\underset{\sim}{B}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K \underset{\sim}{B}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu}, \quad K = \overline{0,\infty} \ \ \dot{=}\ \ \underset{\sim}{B}(t) = \chi_1\left(t, t_\nu, H, \underset{\sim}{B}(K),\ K = \overline{0,\infty}\right), \tag{2.5.7}$$

$$\underset{\sim}{b}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K \underset{\sim}{b}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu}, \quad K = \overline{0,\infty} \ \ \dot{=}\ \ \underset{\sim}{b}(t) = \chi_2\left(t, t_\nu, H, \underset{\sim}{b}(K),\ K = \overline{0,\infty}\right), \tag{2.5.8}$$

а также (2.3.5), переведем соотношение (2.5.2) из области оригиналов в область дифференциальных изображений. При этом получим

$$\sum_{\ell=0}^{K} \underset{\sim}{B}(K-l) \cdot \underset{\sim}{X}(\ell) = \underset{\sim}{b}(K), \tag{2.5.9}$$

или

$$\sum_{\ell=0}^{K-1} \underset{\sim}{B}(K-l) \cdot \underset{\sim}{X}(l) + \underset{\sim}{B}(0) \cdot \underset{\sim}{X}(K) = \underset{\sim}{b}(K), \tag{2.5.10}$$

откуда

$$\underset{\sim}{X}(K) = \underset{\sim}{B}^{-1}(0) \cdot (\underset{\sim}{b}(K) - \sum_{\ell=0}^{K-1} \underset{\sim}{B}(K-l) \cdot \underset{\sim}{X}(l)). \tag{2.5.11}$$

$$n \times 1 \qquad n \times n \qquad n \times 1 \qquad n \times n \qquad n \times 1$$

Таким образом, имея векторные дискреты (2.5.10) при изменении целочисленного аргумента $K = \overline{0, \infty}$ в соответствии с (2.3.5) можно восстановить решение *X(t).*

<u>2.5.3. Численно-аналитический декомпозиционный метод</u>

Допустим, что имеют место дифференциальные преобразования

$$\underset{\sim}{A}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K \underset{\sim}{A}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq\ \underset{\sim}{A}(t)=\chi_1\left(t,t_\nu,H,\underset{\sim}{A}(K),\ K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.5.12}$$

$$\underset{\sim}{a}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K \underset{\sim}{a}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq\ \underset{\sim}{a}(t)=\chi_2\left(t,t_\nu,H,\underset{\sim}{a}(K),\ K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.5.13}$$

$$\underset{\sim}{X}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K \underset{\sim}{X}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq\ \underset{\sim}{X}(t)=\chi_3\left(t,t_\nu,H,\underset{\sim}{X}(K),\ K=\overline{0,\infty}\right), \tag{2.5.14}$$

и соотношение (2.5.4) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. При этом получим

$$\sum_{\ell=0}^{K-1} A^T(\underset{\sim}{K}-\ell)\cdot\sum_{p=0}^{l}\ \underset{\sim}{A}(p)\cdot X(\underset{\sim}{\ell}-p)=\sum_{\ell=0}^{K}\ \underset{\sim}{A}^T(\ell)\cdot a(\underset{\sim}{K}-\ell) \tag{2.5.15}$$

или

$$\sum_{\ell=0}^{K-1} A^T(\underset{\sim}{K}-\ell)\ \sum_{p=0}^{\ell}\ \underset{\sim}{A}(p)\cdot X(\underset{\sim}{\ell}-p)+\underset{\sim}{A}^T(0)\cdot\underset{\sim}{A}(0)\cdot\underset{\sim}{X}(K)=\sum_{\ell=0}^{K}\ \underset{\sim}{A}^T(\ell)\cdot a(\underset{\sim}{K}-\ell), \tag{2.5.16}$$

откуда

$$\underset{\substack{\sim\\ 2n\times 1}}{X}(K)=[\underset{\substack{\sim\\ 2n\times 2n}}{A^T}(0)\cdot\underset{\sim}{A}(0)]^{-1}\cdot\Big(\sum_{\ell=0}^{K}\ \underset{\substack{\sim\\ 2n\times 2m}}{A^T}(\ell)\cdot \underset{2m\times 1}{a(\underset{\sim}{K}-\ell)}-\sum_{\ell=0}^{K-1}\underset{2n\times 2m}{A^T(\underset{\sim}{K}-\ell)}\sum_{p=0}^{\ell}\ \underset{\substack{\sim\\ 2m\times 2n}}{A}(p)\cdot \underset{2n\times 1}{X(\underset{\sim}{\ell}-p)}\Big). \tag{2.5.17}$$

Таким образом, имея матричные дискреты $\underset{\sim}{X}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$, в соответствии с (2.5.14) можно восстановить решение $\underset{\sim}{X}(t)$.

<u>Замечание 3</u>.Представление (2.5.17) повторяет соотношение (2.4.6) с точностью до $\underset{\sim}{A}^T(K), \underset{\sim}{A}(K), \underset{\sim}{X}(K), \underset{\sim}{a}(K), K=\overline{0,\infty}$ вместо $A^T(K)A(K), X(K), a(K), K=\overline{0,\infty}$.

<u>Замечание 4</u>. Матрицы $\underset{\sim}{A}(K), \underset{\sim}{A}^T(K), \left[\underset{\sim}{A}^T(l)\cdot \underset{\sim}{A}\ \ (P)\right]\ , \left[\underset{\sim}{A}^T(l)\cdot \underset{\sim}{A}\ \ (P)\right]^{-1}\ \ l+P=K,$ $\forall l\ =\overline{0,K},\ \ \forall P\ =\overline{0,K},\ \ \forall K\ =\overline{0,\infty}$ блочно-кососимметричны относительно первых главных диагоналей и блочно-симметричны относительно вторых главных диагоналей.

В конце главы приведены основные выводы относительно разработанных аналитических и численно-аналитических методов.

<u>**В третьей главе**</u> “**РАЗРАБОТКА ПАКЕТА ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ “LINPARSYS”**” представлен ППП, построенный с использованием разработанных численно-аналитических декомпозиционных методов с непрямыми и прямыми подходами для решения корректных и некорректных задач линейных однопараметрических систем конечных уравнений. Пакет реализован с помощью языка программирования JAVA. Использована также программная среда MATLAB, посредством которой рассчитывается ряд операций, функции, понятия (например - элементарные операции с матрицами, вычисление обратных и обобщённых обратных матриц и т.д.). Пакет содержит 5 методов/программ, т.е. в нем использована часть множества методов, разработанных во второй главе диссертации, в частности:

- численно-аналитический декомпозиционный метод с непрямым подходом для решения некорректных задач, основанный на матрично-блочно-строчном представлении (2.2.10);
- численно-аналитический декомпозиционный метод с прямым подходом для решения корректных задач, основанный на матрично-блочно-строчном представлении (2.2.12);

- численно-аналитический спектральный метод с прямым подходом, основанный на методе наименьших квадратов (2.4.6);
- численно-аналитический декомпозиционный метод с прямым подходом, основанный на методе наименьших квадратов (2.4.10);
- численно-аналитический декомпозиционный метод с прямым подходом, основанный на сопряженном аналоге метода наименьших квадратов (2.5.17).

Для каждого метода создан отдельный матлаб-файл, который представляет собой некоторую последовательность команд MATLAB.

Элементы матриц и другие необходимые данные получаются с помощью библиотеки SWING. Пользователь посредством окон выбирает метод, вводит данные о матрицах-размерности и элементы матриц, затем ещё некоторые данные, связанные с дифференциальными преобразованиями (например, центр аппроксимации, восстанавливающая функция, соотношения Тейлора, Маклорена и др.), нажимает кнопку “Старт”, которая обеспечивает вызов соответствующего метода с необходимыми параметрами. Пользователь, в зависимости от выбора метода и данных, спустя некоторое время получает ответ, который, в свою очередь, получается посредством восстанавливающей функции, выбранной им. После ввода данных с языка JAVA в среду MATLAB осуществляется обработка данных, после чего запускается сам метод. Для каждого метода осуществляется проверка, при которой решение задачи сравнивается с решениями, полученными другими методами.

Главное окно ППП состоит из трех разделов. В первом разделе находятся методы решения корректных однопараметрических систем конечных уравнений, во втором – методы решения некорректных систем, а в третьем - общий метод (рис.1).

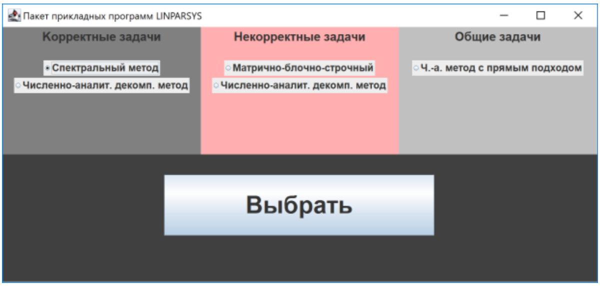

Рис. 1. Главное окно программы

Окна для введения необходимых данных решаемых задач имеют вид, приведенный на рис. 2.

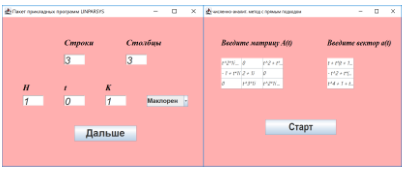

Рис. 2. Окна ввода данных

ППП позволяет широко использовать возможности современных информационных технологий и получать эффективные вычислительные процедуры при решении рассматриваемого класса задач. В случае необходимости, ППП может быть легко дополнен и другими численно-аналитическими методами, разработанными в диссертации.

<u>**В четвертой главе**</u> **“ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ”** решены:

1. <u>Модельный пример (корректная задача, $m = n = 3$)</u>

$$\begin{bmatrix} (1+t+j\cdot t^2) & 0 & (2+t^2+j\cdot t) \\ (-1+j\cdot t^2) & (2+j) & 0 \\ 0 & j\cdot t^3 & (1+j\cdot t^2) \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (3+t+t^2-t^3)+j\cdot 2t\cdot(1+t) \\ (1+t-t^2)+j\cdot(1-2t) \\ (1+t^4)+j\cdot t^2\cdot(1+t) \end{pmatrix}$$

с точным решением $x_1(t) = 1 + j\cdot t, x_2(t) = 1 - j\cdot t, x_3(t) = 1$.

При этом использованы:

- матрично-векторный метод для решения исходной задачи;
- декомпозиционный метод для решения исходной задачи;
- метод наименьших квадратов с прямым подходом для решения эквивалентной задачи;
- сопряженный аналог метода наименьших квадратов с прямым подходом для решения исходной задачи;
- сопряженный аналог метода наименьших квадратов с прямым подходом для решения эквивалентной задачи.

Во всех случаях получено вышеприведенное точное решение.

2. <u>Модельный пример (некорректная задача, $m = 3, n = 2$)</u>

$$\begin{bmatrix} (t-1-j) & 0 \\ t^2 & (t+1+jt) \\ (-t+j) & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^2-2j \\ t^3-jt-j \\ (-t^2-t-1+j) \end{pmatrix}$$

с точным решением $x_1(t) = 1 + t + j, x_2(t) = t - j$.

При этом использованы:

- спектральный метод с прямым подходом для решения исходной задачи,
- метод наименьших квадратов с прямым подходом для решения эквивалентной задачи,
- декомпозиционный метод наименьших квадратов для решения исходной задачи,
- сопряженный аналог метода наименьших квадратов с прямым подходом для решения эквивалентной задачи,
- сопряженный аналог декомпозиционного метода наименьших квадратов для решения исходной задачи.

3. <u>Тестовая задача (некорректная задача, $m = n = 5, \det A(t) = 0$)</u>

$$\begin{bmatrix} (t+1) & t & t & t & (t+1) \\ t & (t-1) & t & t & t \\ t & t & (t+1) & t & t \\ t & t & t & (t-1) & t \\ (t+1) & t & t & t & (t+1) \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \\ X_5(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^2-2 \\ t^2-t \\ t^2-t \\ t^2-t \\ t^2-2 \end{pmatrix}.$$

При этом использованы:

- матрично-блочно-столбцевой эквивалент декомпозиционного численно-аналити-ческого метода с непрямым подходом;
- матрично-блочно-столбцевой эквивалент декомпозиционного численно-аналити-ческого метода с прямым подходом.

В обоих случаях получено точное решение $x_1(t) = x_5(t) = t - 1, x_2(t) = x_4(t) = -t, x_3(t) = t$.

В конце главы приведены основные выводы по решению модельных примеров и тестовой задачи разработанными в диссертации численно-аналитическими методами, основанными на дифференциальных преобразованиях. После запуска методов был проведен ряд сравнительных анализов. В результате запуска программ получена скорость их реализации. Оценена сложность реализации.

Диссертационная работа завершается основными выводами и результатами, а также двумя приложениями. В первом из них приведен программный код ППП, а во втором рассмотрена важная научно-практическая задача – однопараметрическая обобщенная проблема собственных значений-функций и собственных векторов-функций

$$A(t)_{n\times n}\cdot X(t)_{n\times 1}=\lambda(t)_{1\times 1}\cdot B(t)_{n\times n}\cdot X(t)_{n\times 1},$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – матрицы задачи; $\lambda(t)$ – собственные значения-функции; $X(t)$ – собственные векторы-функции. Решение этой задачи состоит из трех подзадач:

- определение аппроксимирующей матрицы $D(t)=A^{-1}(t)\cdot B(t)$;
- определение собственных значений-функций $\lambda(t)$, i=$\overline{1,n}$ матрицы $D(t)$;
- определение собственных векторов-функций $X(t)$, i=$\overline{1,n}$.

Для решения всех этих трех подзадач разработаны последовательные и параллельные вычислительные процедуры, основанные на дифференциальных преобразованиях. Естественно, первые две подзадачи не принадлежат тематике настоящей диссертации, а третья - полностью содержится в ней. Научно-практические результаты по этой задаче опубликованы в работе [4]. Они могут служить также основой для решения аналогичных важных, так называемых, палиндромных фундаментальных задач, описываемых матрично-векторными уравнениями $A(t)\cdot X(t)=\lambda(t)\ \cdot A^T(t)\cdot X(t)$ и $A(t)\cdot X(t)=\lambda(t)\cdot\ A^*(t)\cdot X(t)$.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Основные результаты диссертации сводятся к следующему:

1. <u>В сфере математического обеспечения автоматизированных систем:</u> с применением дифференциальных преобразований были разработаны следующие методы решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений:
   - Аналитические декомпозиционные методы с непрямым подходом (2.1.11) и (2.1.13) [1],[8],
   - Численно-аналитические декомпозиционные методы с непрямым подходом (2.2.7) и (2.2.9) [2], [8],
   - Аналитические и численно-аналитические декомпозиционные методы с прямым подходом (2.3.1), (2.3.3) и (2.3.11) [3], [8],
   - Спектральные, аналитические декомпозиционные численно-аналитические декомпозиционные методы (2.4.4), (2.4.7) и (2.4.9), основанные на методе наименьших квадратов [6], [8], [9],
   - Аналитические декомпозиционные, а также численно-аналитические и численно-аналитические декомпозиционные методы (2.5.3), (2.5.9) и (2.5.15) с прямым подходом, основанные на сопряженном аналоге метода наименьших квадратов [7].
2. <u>В сфере программного обеспечения автоматизированных систем:</u>
   - с использованием методов, разработанных в работе, был создан ППП "LINPARSYS", работающий в среде самых популярных и современных операционных систем Windows, Mac OS и Linux, языком программирования которого является JAVA, исполнение методов обеспечивается программой MATLAB, а создание диалоговых окон осуществляется с помощью библиотеки SWING.
   - Пакет состоит из 3-х основных разделов: в первом разделе охвачены программы решений корректных задач, во втором - некорректных задач и в третьем - задачи общего вида [5], [8].

- Пакет позволяет через окна выбирать метод решения, вводить данные о матрицах и дифференциальных преобразованиях, получить решение задачи после нажатия кнопки “Start”, причем после ввода данных происходит проверка данных, после передачи данных из JAVA в MATLAB происходит их обработка, лишь после чего запускается сам метод решения. Для каждого метода производится проверка, и решение задачи сравнивается с решениями, полученными посредством применения других методов [10].

3. В прикладной сфере автоматизированных систем

С использованием разработанных в диссертации методов и созданного пакета прикладных программ решены два модельных примера и одна известная тестовая задача, в частности:

- Корректная система линейных однопараметрических конечных уравнений с 3x3 матрицей с комплексными элементами и вектором свободных членов с комплексными элементами, для чего был использован хорошо известный матрично-векторный параллельный метод, предложенный метод декомпозиции, сопряженный аналог метода наименьших квадратов с прямым подходом [3], [6], [9].
- Некорректная система линейных однопараметрических конечных уравнений с 3x2 матрицей с комплексными элементами и вектором свободных членов с комплексными элементами, для чего был использован спектральный метод, метод наименьших квадратов с декомпозиционным подходом, предложенный метод наименьших квадратов с прямым подходом, аналог сопряженного метода наименьших квадратов с прямым подходом, аналог сопряженного метода наименьших квадратов с декомпозиционным подходом [7].
- Некорректная система линейных однопараметрических конечных уравнений с 5x5 матрицей с действительными элементами и вектором свободных членов с действительными элементами (тестовая задача), с этой целью используя численно-аналитические декомпозиционные методы с непрямым и прямым подходами.
- В результате решения модельных примеров и тестовой задачи получены оценки сравнительного анализа разработанных численно-аналитических методов.
- Решена важная научно-практическая однопараметрическая обобщенная проблема собственных значений-функций и собственных векторов-функций, с целью которой предложены последовательные и параллельные численно-аналитические методы [4], [8].

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Симонян С.О., **Адамян М.А.** Аналитические декомпозиционные методы решения линейных однопараметрических некорректных систем конечных уравнений с комплексными матрицами (I) // Вестник ГИУА. Серия “Информационные технологии, электроника, радиотехника”. – 2014. - Вып. 17, N. 2. – С. 9-14.

2. Симонян С.О., **Адамян М.А.** Численно-аналитические декомпозиционные методы решения линейных однопараметрических некорректных систем конечных уравнений с комплексными матрицами (II) // Вестник ГИУА. Серия “Информационные технологии, электроника, радиотехника”. – 2014. - Вып. 17, N. 2. – С. 15-21.

3. Симонян С.О., **Адамян М.А.** Декомпозиционные методы решения линейных однопараметрических корректных систем конечных уравнений с комплексными матрицами // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2015, Т. LXVIII, N.1. – С. 61-72.

4. Симонян С.О., Адамян Г.В., **Адамян М.А.** Последовательные и параллельные численно-аналитические методы решения однопараметрической обобщенной проблемы собственных

значений-функций и собственных векторов-функций // Вестник ИАА. – 2015. – Т.12, N. 3. – С. 533-538.

5. **Адамян М.А.,** Симонян С.О., Адамян Г.В. К построению пакета прикладных программ для решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений // Вестник НПУА: Сборник научных статей. - Ч.1. Ереван 2016. – С. 174-178.

6. Симонян С.О., **Адамян М.А.** К некоторым методам решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН. Т. LXVIII, N 2. - 2015. - С. 225-237.

7. Симонян С.О., **Адамян М.А.** Сопряженные аналоги метода наименьших квадратов решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН. - 2018. - Т. LXXI, N 3. С. 354-366.

8. **Адамян М.А.** К методам решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений // Вестник НПУА: Сборник научных статей. - Ч.1. Ереван 2019. - С. 91-94.

9. Симонян С.О., **Адамян М.А.** К решению линейных однопараметрических систем конечных уравнений // Եվրոպական համալսարանի հրատարակչություն: Գիտական աշխատանքների ժողովածու: Ереван, 2019.- С. 361-369.

10. **Адамян М.А.** Пакет прикладных программ “LINPARSYS” для решения задач типа A(t)mxn•X(t)nx1=a(t)mx1 // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2019, N.2. - С. 54-61.

ԵԶՐԱՀԱՆԳՈՒՄ

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները հանգում են հետևյալին՝

1. **<u>Ավտոմատացված համակարգերի մաթեմատիկական ապահովման բնագավառում՝</u>** դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառմամբ մշակվել են գծային միապարամետրական վերջավոր հավասարումների համակարգերի լուծման հետևյալ եղանակները
   - անուղղակի մոտեցմամբ (2.1.11) և (2.1.13) անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն եղանակները [1], [8],
   - անուղղակի մոտեցմամբ (2.2.7) և (2.2.9) թվա-անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն եղանակները [2], [8],
   - ուղղակի մոտեցմամբ (2.3.1), (2.3.3) անալիտիկ և (2.3.11) թվա-անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն եղանակները [3], [8]
   - նվազագույն քառակուսիների մեթոդի վրա հիմնված (2.4.4) տարրապատկերային, (2.4.7) անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն և (2.4.9) թվա-անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն եղանակները [6], [8], [9],
   - նվազագույն քառակուսիների մեթոդի համալուծ նմանակի վրա հիմնված (2.5.3) անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն, ուղղակի մոտեցմամբ (2.5.9) թվա-անալիտիկ և (2.5.15) թվա-անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն եղանակները [7]:

2. **<u>Ավտոմատացված համակարգերի ծրագրային ապահովման բնագավառում</u>**
   - Աշխատանքում մշակված եղանակների օգտագործմամբ ստեղծվել է ժամանակակից ամենատարածված Windows, Mac OS, Linux օպերացիոն համակարգերում աշխատող "LINPARSYS" ԿԾՓ-ն, որի իրականացման լեզուն JAVA-ն է, եղանակների կատարումն ապահովվում է MATLAB ծրագրով, երկխոսային պատուհանների ստեղծումն իրականացվում է SWING գրադարանի միջոցով:

- Փաթեթը բաղկացած է 3 հիմնական բաժիններից՝ 1-ին բաժնում ընդգրկված են կոռեկտ խնդիրների, 2-րդ բաժնում՝ ոչ կոռեկտ խնդիրների և 3-րդ բաժնում՝ ընդհանուր տեսքի խնդիրների լուծման ծրագրերը [5], [8]:
- Փաթեթը թույլ է տալիս պատուհանների միջոցով ընտրել լուծման եղանակը, ներմուծել մատրիցների և դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վերաբերյալ տվյալները, "Start" կոճակը սեղմելուց հետո ստանալ խնդրի լուծման պատասխանը, ընդ որում տվյալների ներմուծումից հետո կատարվում է տվյալների վավերացում, JAVA-ից դեպի MATLAB տվյալների փոխանցումից հետո կատարվում է դրանց մշակում, որից հետո է միայն գործարկվում լուծման բուն եղանակը: Յուրաքանչյուր եղանակի համար կատարվում է ստուգում, և խնդրի լուծումը համեմատվում է այլ եղանակներով ստացված լուծումների հետ [10]:

3. <u>Ավտոմատացված համակարգերի կիրառական բնագավառում</u>

Ատենախոսության մեջ մշակված եղանակների և ստեղծված կիրառական ծրագրերի փաթեթի օգտագործմամբ լուծվել են երկու մոդելային օրինակներ և մեկ հայտնի թեստային խնդիր, մասնավորապես՝

- 3x3 չափերով կոմպլեքս տարրերով մատրիցով և կոմպլեքս տարրերով ազատ անդամների վեկտորով կոռեկտ գծային միապարամետրական վերջավոր հավասարումների համակարգ, այդ նպատակով օգտագործելով հայտնի մատրիցա-վեկտորային զուգահեռ եղանակը, առաջարկված դեկոմպոզիցիոն եղանակը, ուղղակի մոտեցմամբ նվազագույն քառակուսիների մեթոդի համալուծ նմանակը [3], [6], [9]:
- 3x2 չափերով կոմպլեքս տարրերով մատրիցով և կոմպլեքս տարրերով ազատ անդամների վեկտորով ոչ կոռեկտ գծային միապարամետրական վերջավոր հավասարումների համակարգ, այդ նպատակով օգտագործելով տարրապատկերային եղանակը, առաջարկված ուղղակի մոտեցմամբ նվազագույն քառակուսիների մեթոդը, դեկոմպոզիցիոն մոտեցմամբ նվազագույն քառակուսիների մեթոդը, ուղղակի մոտեցմամբ նվազագույն քառակուսիների մեթոդի համալուծ նմանակը, դեկոմպոզիցիոն մոտեցմամբ նվազագույն քառակուսիների մեթոդի համալուծ նմանակը [7]:
- 5x5 չափերով իրական տարրերով մատրիցով և իրական տարրերով ազատ անդամների վեկտորով ոչ կոռեկտ գծային միապարամետրական վերջավոր հավասարումների համակարգ (թեստային խնդիր), այդ նպատակով օգտագործելով անուղղակի և ուղղակի մոտեցումներով թվա-անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն եղանակները:
- Մոդելային օրինակների և թեստային խնդրի լուծման արդյունքում ստացվել են մշակված թվա-անալիտիկ եղանակների համեմատական վերլուծության գնահատականները:
- Լուծվել է կարևոր գիտա-գործնական նշանակություն ունեցող սեփական արժեքներ-ֆունկցիաների և սեփական վեկտորներ-ֆունկցիաների միապարամետրական ընդհանրացված հիմնախնդիրը, որի նպատակով առաջարկվել են հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակներ [4], [8]:

SUMMARY

<u>Basic results of the thesis are drawn towards the following:</u>

1. **<u>In the sphere of coverage of automated mathematical systems</u>** with application of differential transformations, the following methods of solution of linear one parameter finite equations were developed:

- analytical decompositional methods (2.1.1) and (2.1.3) with indirect approach [1], [8],

- numeric-analytical decompositional methods (2.2.7) and (2.2.9) with indirect approach [2], [8],
- analytical and numeric-analytical decompositional methods (2.3.1), (2.3.3) and (2.3.11) with direct approach [3], [8],
- elemental-figurative, analytical decompositional and digital-analytical decompositional methods (2.4.4), (2.4.7) and (2.4.9) based on the method of least squares [6], [8], [9],
- analytical decompositional, with direct approach, numerical-analytical and numerical-analytical decompositional methods (2.5.3) ,(2.5.9) and (2.5.15), based on the complex analogue of the method of least squares [7]

2. <u>In the sphere of software for automated systems</u>

- The "LINPARSYS"AP, which works in popular and most spread Windows, Mac OS and Linux operational systems, was created by using the methods developed in this paper. Its programming language is JAVA, whereas the implementation of methods is carried out by MATLAB program and the creation of dialogue boxes is carried out by means of SWING library.
- The package consists of 3 basic parts. In part one solution programs for well-posed problems are put and in part two solution programs for ill-posed problems are placed, whereas in part three solution programs for general type problems are included [5], [8].
- The package enables the choice of the solution method, inputting data on matrixes and differential transformations, receipt of the problem solution after pressing the “START” button. Meantime after data inputting their ratification is activated, and after the transfer of data from JAVA to MATLAB their processing takes place and then only, the basic solution method is launched. For each method a dedicated checking is carried out and the solution of a particular problem is compared with solutions obtained by means of applying other solution methods [10].

3. <u>In the applied field of automated systems</u>

With the use of the methods designed in the dissertation and the developed application package, two model examples and one well-known test problem were solved, in particular:

- A correct system of linear one-parametric finite equations with 3x3 matrix having complex elements and a vector of free terms having complex elements, for which the well-known matrix-vector parallel method, the proposed decomposition method and conjugate least squares method with a direct approach are used [3], [6], [9].
- A non-correct system of linear one-parametric finite equations with 3x2 matrix having complex elements and a vector of free terms having complex elements, for which the spectral method, the conjugate least squares method with the decomposition approach, the least squares method with the direct approach, the analogue of conjugate least squares method with the direct approach, the analogue of conjugate least squares method with the decomposition approach are used [7].
- An ill-posed system of linear one-parameter finite equations with a 5x5 matrix with real elements and vector of free terms with real elements (test problem), for which numerical-analytical decomposition methods with direct and indirect approaches are used.
- As a result of solving the test problem and model examples, estimates of comparative analysis of the developed numerical-analytical methods were obtained.
- The important scientific and technical problem of one-parametric generalized problem of eigenvalues-functions and eigenvectors-functions, for which purpose sequential and parallel numerical-analytical methods are proposed [4], [8].