ՀԱՍՏԱՏՈՒՄ ԵՄ
ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի
ինստիտուտի տնօրեն
Ռ. Հ. Արամյան

22 օգոստոսի, 2023թ.

ԱՌԱՋԱՏԱՐ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅԱՆ ԿԱՐԾԻՔ

Անի Լևոնի Խաչատրյանի "Միակության և վերականգնման հարցեր օրթոգոնալ սպլայն համակարգերի համար" վերնագրով, Ա.01.01 "Մաթեմատիկական անալիզ" մասնագիտությամբ ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման համար ատենախոսության մասին

Օրթոգոնալ շարքերի միակության խնդիրները բազմազան են և ունեն հարուստ պատմություն: Առաջին հիմնարար արդյունքները այդ ուղղությամբ գրանցվել են դեռևս 19-րդ դարում եռանկյունաչափական շարքերի համար: 1870 թվականին գերմանացի հանրահայտ մաթեմատիկոս Գեորգ Կանտորը ապացուցեց, որ ամենուրեք զրոյի զուգամիտող եռանկյունաչափական շարքի գործակիցները պարտավոր են լինել զրոներ: Այնուհետև 1912 թվականին Վալե Պուսենը, ընդհանրացնելով Կանտորի թեորեմը, ցույց տվեց, որ եթե եռանկյունաչափական շարքը ամենուրեք զուգամիտում է ինտեգրելի ֆունկցիայի, ապա այն հանդիսանում է այդ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը: Ռուս մաթեմատիկոս Դ. Մենշովը 1916 թվականին կառուցեց մի եռանկյունաչափական շարք, որը համարյա ամենուրեք զուգամիտում է զրոի, բայց նրա ոչ բոլոր գործակիցներն են զրոներ: Դրանով պարզ դարձավ, որ Կանտորի և Վալե Պուսենի թեորեմների պնդումները ճիշտ չեն համարյա ամենուրեք զուգամիտության պայմանով: Հետագայում Մենշովի վերոհիշյալ և մի շարք այլ աշխատանքները հիմնարար դարձան օրթոգոնալ շարքերի միակության և ներկայացման բազմաթիվ խնդիրների ուսումնասիրություններում: Նմանատիպ խնդիրներ դիտարկվեցին նաև Ուոլշի, Հաարի, Ֆրանկլինի ինչպես նաև ընդհանուր օրթոնորմավորված համակարգերի համար: Օրթոգոնալ շարքերով ներկայացման հարցերում հիմնարար արդյունքներ են գրանցվել Ա.Թալալյանի և նրա աշակերտներ Ռ.Հովսեփյանի, Փ.Հարությունյանի, Ն. Պողոսյանի, Գ.Գրիգորյանի և Գ.Գևորգյանի աշխատանքներում:

Անի Խաչատրյանի ատենախոսությունը նվիրված է Ֆրանկլինի և ընդհանուր սփլայն համակարգերով շարքերի միակության և դրանց գործակիցների վերականգնման որոշակի հարցերի: Դիտարկվել են խնդիրների միաչափ և բազմաչափ տարբերակներ: Ստացված արդյունքները շարունակում են Գ.Գևորգյանի, Մ.Պողոսյանի, Կ.Նավասարդյանի և Կ.Քեռյանի հետազոտությունները, և հանդիսանում նախկինում ստացված որոշ արդյունքների ընդհանրացումներ: Խնդիրների դրվածքի համար հիմք է հանդիսացել Ալեքսանդրովի և Գևորգյանի կողմից ստացված միակության թեորեմը, որում առաջին անգամ դրվել է պայման, որն ապահովում է Մենշովյան զրո-շարքերի միակությունը:

Թեորեմ 1 (Ալեքսանդրով-Գևորգյան). *Եթե եռանկյունաչափական շարքի S_n մասնակի գումարները բավարարում են*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left|\left\{\sup_n |S_n| > \lambda\right\}\right| = 0 \tag{1}$$

պայմանին, իսկ նրա մասնակի գումարները համարյա ամենուրեք զուգամիտում են f ինտեգրելի ֆունկցիային, ապա շարքը հանդիսանում է f-ի Ֆուրիեի շարքը և նրա գործակիցները վերականգնվում են A-ինտեգրալի միջոցով:

Այս արդյունքն ու նրա ապացույցի տեխնիկան հետագայում շատ հետազոտությունների հիմք հանդիսացավ: Նմանատիպ միակության թեորեմներ ապացուցվեցին նաև այլ դասական համակարգերի համար, դիտարկելով խնդրի ինչպես միաչափ այնպես էլ բազմաչափ տարբերակները: Մասնավորապես՝ Գևորգյանի կողմից լուծվեց խնդրի տարբերակը Ֆրանկլինի և Հաարի շարքերի համար, իսկ Կոստինը ապացուցեց այն Հաարի ընդհանրացված համակարգի համար:

Ատենախոսության առաջին գլխում ստացվել է Ալեքսանդրով-Գևորգյանի տիպի միակության թեորեմ Ֆրանկլինի դասական համակարգի համար, որում դիտարկվել է (1) պայմանի հետևյալ ընդհանրացված տարբերակը, որը նախկինում ներմուծված է եղել Քեռյանի կողմից.

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\{\sup_n |S_{q_n}| > h_m\}} h_m = 0 \tag{2}$$

որտեղ h_m-ը կտոր առ կտոր հաստատուն ֆունկցիաների որոշակի հաջորդականություն է, իսկ q_n-ը՝ բնական թվերի աճող հաջորդականություն, որի համար q_{n-1}/q_n հարաբերությունը սահմանափակ է: Առաջին գլխի հիմնական պնդումը հնչում է հետևյալ կերպ.

Թեորեմ 2 (Քեռյան-Խաչատրյան). *Եթե Ֆրանկլինի շարքի S_n մասնակի գումարները բավարարում են (2) պայմանին և լայն չափի զուգամիտում են f ինտեգրելի ֆունկցիային, ապա շարքը հանդիսանում է f-ի Ֆուրիե-Ֆրանկլինի շարքը և նրա գործակիցները վերականգնվում են $A H$-ինտեգրալի միջոցով:*

Ստացված արդյունքը հանդիսանում է Գևորգյանի և Քեռյանի հետազոտությունների արմատական շարունակությունը և ընդհանրացնում է Քեռյանի նախկինում ստացված թեորեմը, որում դիտարկվել է $q_n = 2^n$ դեպքը:

Աշխատանքի երկրորդ գլխում դիտարկվել է Չիսելսկու համակարգը, որը իրենից ներկայացնում է երկուական հանգույցներով օրթոգոնալ սփլայն համակարգ և հանդիսանում է Ֆրանկլինի դասական համակարգի ընդհանրացումը: Հաջողվել է ստանալ Թեորեմ 1-ի փարբերակը Չիսելսկու բազմապատիկ համակարգի համար $q_n = 2^n$ դեպքում մասնակի գումարների (1) դասական պայմանով:

Երրորդ գլխում նույն խնդիրը դիտարկվել է նաև ընհանրացված հանգույցներով միաչափ սփլայն համակարգերի համար: Գտնվել է հանգույցների ռեգուլյարության այն ճշգրիտ պայմանը, որն ապահովում է համապատասխան սփլայն շարքերի միակության և գործակիցների վերականգնման հնարավորությունը: Երրորդ գլխի գլխավոր արդյունքը միակության թեորեմն է, որը տրվում է մասնակի գումարների (1) տիպի պայմանով: Բացի այդ, լրացուցիչ երկու թեորեմներով ապացուցվում է գլխավոր արդյունքի մեջ առկա ռեգուլյարության պայմանների անհրաժեշտությունը:

Աշխատանքում էական թերություններ չեն նկատվել:

Ներկա ատենախոսությունը կարևոր գիտական հետազոտություն է օրթոգոնալ շարքերի միակության և վերականգնման խնդիրների ուսումնասիրության բնագավառում: Հեղինակը լուծել է մի շարք կարևոր և դժվարին խնդիրներ: Աշխատանքում ստացված հիմնական արդյունքները ամփոփված են 3 հոդվածներում, որոնցից երկուսը տպագրված են ազդեցության գործակից ունեցող ամսագրերում: Մեկ հոդված էլ, ինչպես արդեն հայտնի է դարձել, լույս կտեսնի հունգարական "Acta Mathematica Hungarica" ամսագրում: Սեղմագիրն ամբողջությամբ արտացոլում է ատենախոսության բովանդակությունը:

Հարկ եմ համարում նշել նաև, որ Անի Խաչատրյանը ակտիվորեն մասնակցում է ԵՊՀ Մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի դասախոսա-մանկավարժական աշխատանքներին և սույն հետազոտությունները անշուշտ կնպաստեն նրա որակավորման բարձրացմանը: Հուսով եմ, որ Անի Խաչատրյանը կշարունակի իր հետագա գիտական գործունեությունը: Մասնավորապես՝ հետաքրքիր կլինի ստանալ երկրորդ և երրորդ գլխում ստացված հիմնական արդյունքները մաժորանտի ընդհանրացված պայմանի դեպքում:

Աշխատանքը բավարարում է ՀՀ ԲԿԳԿ-ի կողմից թեկնածուական ատենախոսություններին ներկայացվող պահանջներին, իսկ հեղինակը՝ Անի Լևոնի Խաչատրյան, արժանի է Ա 01.01 "Մաթեմատիկական անալիզ" մասնագիտությամբ ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի շնորհմանը:

Աշխատանքի քննարկմանը ներկա են եղել ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտի աշխատակիցներ, ինստիտուտի տնօրեն ֆ.մ.գ.դ. Ռ.Արամյանը, ինստիտուտի գիտքարտուղար ֆ.մ.գ.թ. Դ.Դավիդովան, իրական անալիզի բաժնի վարիչ ֆ.մ.գ.դ. Գ. Կարագուլյանը, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամներ Ա.Սահակյանը և Բ.Նահապետյանը և ֆ.մ.գ.դ. Հ. Հակոբյանը, ֆ.մ.գ.թ. Լ.Խաչատրյանը, ֆ.մ.գ.թ. Ա.Մկրտչյանը, ֆ.մ.գ.թ. Ս.Աղեկյանը, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Մնացականյանը:

ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտի
Իրական անալիզի բաժնի վարիչ Գ. Ա. Կարագուլյան

22 օգոստոսի 2023թ