О Т З Ы В
НА ДИССЕРТАЦИЮ А.Р.АКОПЯНА "НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ", ПРЕДСТАВЛЕННУЮ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Целью диссертации является исследование нелинейных интегральных уравнений с некомпактными операторами. Эта тематика, восходящая к пионерским работам П.С.Урысона (1923) и А.Гаммерштейна (1930), впоследствии развивалась в школах М.А.Красносельского и Ф.Браудера. Основное внимание в них уделялось линейным интегральным уравнениям, действующим в гильбертовых и рефлексивных банаховых пространствах. Нелинейные интегральные операторы, действующие на неограниченных множествах и в нерефлексивных банаховых пространствах, стали изучаться, начиная со статьи О.Дикмана (1978). Этой теме были посвящены работы Л.Г.Арабаджяна, Н.Б.Енгибаряна и Х.А.Хачатряна с соавторами.

Необходимость в исследовании подобного рода нелинейных интегральных уравнений во многом диктуется их приложениями в механике (газовая динамика), теоретической физике (теория переноса излучения, теория струн), биологии (распространение эпидемий).

В диссертации рассматриваются вопросы существования и единственности решений указанных уравнений, а также их асимптотического поведения.

Остановимся подробнее на результатах, полученных в диссертации. В первой главе рассматриваются нелинейные интегральные уравнения с консервативным ядром на положительной полуоси следующего вида

$$f(x) = \lambda(x) \int_0^\infty K(y)G(f(r(x,y)))dy, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

в классе неотрицательных ограниченных функций $f(x)$. На функции, входящие в уравнение (1), накладываются условия, указанные на стр.18, из которых выделим следующие. Функция $\lambda(x)$ удовлетворяет неравенству $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ (но не совпадает с тождественной единицей) и монотонно возрастает на $\mathbb{R}^+$. Ядро $K \in L_1(\mathbb{R}^+)$ положительно и консервативно. Нелинейность G задается непрерывной функцией, которая монотонно возрастает на некотором отрезке $[0,\eta]$, $\eta > 0$. При этом предполагается, что $G(0) = 0$, $G(\eta) = \eta$ и $G(u) \geq u$ на $[0,\eta]$. Непрерывная функция $r(x,y)$ неотрицательна и удовлетворяет условию: при фиксированном x функция $r(x,y)$ монотонно возрастает по y, а при фиксированном y она монотонно возрастает по x. Кроме того, $r(x,0) \geq x$ и при некотором $\delta > 0$ удовлетворяет оценке $r(x,\delta) \geq x + \delta$.

В линейном случае, когда $r(x,y) \geq x+y$, уравнение (1) изучалось Л.Г.Арабаджяном и Н.Б.Енгибаряном, а в нелинейном случая — Х.А.Хачатряном. Основной трудностью при исследовании этого уравнения является то, что рассматриваемый оператор не компактен.

Главный результат первой главы (теорема 1.1) утверждает, что при наложенных выше условиях уравнение (1) обладает нетривиальным неотрицательным ограниченным решением $f(x)$, которое стремится к η при $x \to \infty$ так, что $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Несколько слов о доказательстве. Используется вспомогательное линейное интегральное уравнение на полуоси вида

$$\varphi(x) = 1 - \lambda(x) + \int_0^\infty K(y)\varphi(r(x,y))dy$$

Это уравнение решается с помощью итераций, которые монотонно сходятся к предельной функции $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^+)$, причем $\varphi(x) \leq 1 - \lambda(x)$. Исходное уравнение (1) также решается методом итераций.

Отметим, что для уравнения (1) нет единственности в классе ограниченных функций, что подтверждается контрпримером.

Во второй главе рассматриваются системы нелинейных интегральных уравнений на всей оси с монотонными операторами типа Гаммерштейна–Вольтерра. Имеются в виду системы следующего вида

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x,t)\{f_j(t) + \omega_{ij}(t, f_j(t))\}dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

и

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x,t)\{G_j(\varphi_j(t)) + \omega_{ij}(t, \varphi_j(t))\}dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Ядра $K_{ij}(x,t)$ являются положительными ограниченными функциями. Кроме того, для некоторой симметричной матрицы $A = (a_{ij})$ с положительными элементами и единичным спектральным радиусом выполняются условия, указанные на стр. 31, из которых выделим следующие: компоненты матрицы

$$\gamma_{ij}(x) := a_{ij} - \int_{-\infty}^{x} K_{ij}(x,t)dt$$

неотрицательны, причем функции $\gamma_{ij}(x)$ стремятся к нулю при $x \to \infty$ (но не равна нулю тождественно). При этом $\int_t^\infty K_{ij}(x) \leq a_{ij}$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Из условий, наложенных на матрицу A, следует, что она обладает собственным вектором η с положительными компонентами, таким что $A\eta = \eta$. Из условий, накладываемых на функции $G_j(u)$ и $\omega_{ij}(t,u)$ на стр.32, выделим следующие. Непрерывные функции $G_j(u)$ выпуклы вверх на $\mathbb{R}^+$ и монотонно возрастают на $\mathbb{R}^+$, при этом существуют η_j^* такие, что $G_j(\eta_j^*) = \eta_j^*$. Функции $\omega_{ij}(t,u)$ монотонно возрастают по u на $\mathbb{R}^+$, при этом функции $\beta_{ij}(t) := \sup_{u\in\mathbb{R}^+}(\omega_{ij}(t,u))$ монотонно не убывают по t и удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(x)(a_{ij} - \gamma_{ij}(x)) \leq \sum_{j=1}^{n} \eta_j \gamma_{ij}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2.1 утверждает, что при наложенных условиях система (2) обладает однопараметрическим семейством нетривиальных покомпонентно неотрицательных ограниченных решений $f^\gamma(x) = (f_1\gamma(x), \ldots, f_n^\gamma(x))$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, стремящихся к пределу $\eta_j\gamma$ так, что $\eta_j\gamma - f_j^\gamma \in L_1(-\infty, 0)$.

Для системы (3) доказывается существование нетривиального покомпонентно неотрицательного ограниченного решения $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, компоненты которого стремятся к пределу η_j^* так, что $\eta_j^* - \varphi \in L_1(-\infty, 0)$. Это утверждение доказывается с помощью вспомогательной системы неоднородных линейных уравнений типа Вольтерра

$$\psi_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{x} K_{ij}(x,t)\psi_j(t)dt,$$

где

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(x)(a_{ij} - \gamma_{ij}(x)),$$

решение которой ищется методом итераций.

В третьей главе рассматриваются нелинейные интегральные уравнения на всей оси вида

$$Q(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

решение которых ищется в классе неотрицательных ограниченных функций $f(x)$. Из условий на функции Q и K, приведенных на стр. 52, выделим следующие. Непрерывная функция Q нечетна и монотонно возрастает на $\mathbb{R}$, при этом она строго выпукла на положительной полуоси. Ядро K непрерывно и положительно, при этом $K(x,t) = K(-x,-t) = K(t,x)$, а функция $\gamma(x)$, определяемая равенством

$$\gamma(x) := 1 - \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dt,$$

неотрицательна и суммируема на всей оси.

Доказывается, что при наложенных условиях в случае $\gamma(x) \equiv 0$ уравнение (4) не имеет нетривиальных решений в классе неотрицательных ограниченных функций. Если же $\gamma(x)$ не равна тождественно нулю и $\gamma(x) \leq 1 - \varepsilon_0$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, то верно следующее утверждение. Если уравнение $Q(u) = \varepsilon_0 u$ имеет положительное решение, то уравнение (4) также имеет положительное решение. В этих же условиях уравнение (4) не может иметь более одного решения в классе нетривиальных неотрицательных ограниченных функций.

Далее рассматривается дискретный аналог уравнения (4) следующего вида

$$Q(x_n) = \sum_{j=\infty}^{\infty} a_{n-j}x_j, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Предположим, что коэффициенты a_n положительны, симметричны (т.е. $a_n = a_{-n}$) и монотонно убывают по n так, что $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 1$ и $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j|j| < \infty$. Решение ищется в классе ограниченных последовательностей, а нелинейность Q удовлетворяет тем же условиям, что и в случае уравнения (4).

Доказывается, что при наложенных условиях система (5) не имеет нетривиальных решений в классе неотрицательных ограниченных последовательностей.

Перечислим основные результаты диссертации.

(1) Для широкого класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси доказано существование нетривиального неотрицательного ограниченного решения, имеющего предел на бесконечности. Найдена интегральная асимптотика полученного решения. Приведен пример неединственности решения.

(2) Построено однопараметрическое семейство нетривиальных ограниченных решений, имеющих предел на бесконечности с монотонной зависимостью от параметра, для системы квазилинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Вольтерра.

(3) Предложена конструкция ограниченного положительного решения системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Вольтерра и найдена его асимптотика на бесконечности.

(4) Доказана теорема существования и единственности нетривиального ограниченного решения интегрального уравнения с выпуклой нелинейностью на всей прямой.

(5) Найдены условия, обеспечивающие отсутствие нетривиальных неотрицательных решений в пространстве ограниченных последовательностей для дискретных аналогов рассматриваемых нелинейных интегральных уравнений.

Отметим, что необходимость условий, накладываемых на ядра и нелинейности в рассматриваемых интегральных уравнениях, демонстрируется многочисленными примерами (а в некоторых случаях контрпримерами) из физически осмысленных классов функций.

Замечены следующие опечатки.

(1) На стр. 33 в заглавии параграфа 2.1, по-видимому, должна упоминаться система (2.1), а не (2.2) как в диссертации.

(2) На стр.52 в условии q_1) по-видимому вместо x должно быть u.

Впрочем, количество опечаток для такой работы, изобилующей громоздкими формулами, следует признать незначительным и они, конечно, не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Подведем итог. В диссертации А.Р.Акопяна рассмотрен большой класс нелинейных интегральных уравнений с некомпактными операторами, имеющих многочисленные приложения в механике, теоретической физике и биологии. Все результаты опубликованы и снабжены подробными доказательствами, а накладываемые условия обоснованы примерами и контрпримерами, демонстрирующими их целесообразность. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Тем самым, диссертация А.Р.Акопяна удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор физико-математических наук
профессор

А.Г.Сергеев

Подпись Сергеева А.Г. заверяю

12.02.2024

ОТДЕЛ КАДРОВ

Заведующий отделом кадров
Усачева О. Г.